**Révision n°5**

**Problème. Fonction beta d'Euler** (*extrait de Centrale MP 2015*)

## A. La fonction $\Gamma$

**A.1)**

a) [1.5 pt] Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $t \longmapsto (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $\Gamma$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

b) [2.5 pts] Montrer que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$.

Pour la suite, on rappelle (propriété supposée connue ici) que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

**A.2)** [1 pt] Soient $x > 0$ et $\alpha > 0$. Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} \, dt$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\alpha^x$.

## B. Equation fonctionnelle de la fonction $\beta$

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt$.

**B.1)** [1 pt] Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$.

**B.2)** [1 pt] Montrer que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$.

**B.3)** [2 pts] ($\bigstar$) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Etablir que $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

**B.4)** [1 pt] En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

## C. Relation entre la fonction $\beta$ et la fonction $\Gamma$

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

**C.1)** [1 pt] Expliquer pourquoi il suffit de prouver la relation pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite, on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

**C.2)** [1.5 pt] En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$, montrer que

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \, du$$

**C.3)** [0.5 pt] On note $F_{x,y}$ la primitive sur $]0,+\infty[$ de $t \longmapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

**C.4)** [2 pts] On pose $G(a) = \int_0^{+\infty} \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)\, du$.

Montrer que $G$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

**C.5)** [1 pt] Montrer que $\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

**C.6)** [1.5 pt] Montrer que $G$ de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

**C.7)** [1 pt] Pour $a > 0$, exprimer $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $e^{-a}$ et $a^{y-1}$.

**C.8)** [1 pt] Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

## Exercice. Majoration sous-gaussienne

Soit $E = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_N}\}$ un ensemble fini de $\boxed{\text{vecteurs unitaires de } \mathbb{R}^d}$, où $\mathbb{R}^d$ est muni du psc $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit $X$ une v.a. à valeurs dans $E$. On suppose aussi $\boxed{E(X) = \overrightarrow{0}}$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires. indépendantes et de même loi que $X$.

**1)** [1.5 pt] Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur unitaire. On considère $\boxed{L_X(t) = E(\exp(t\langle X, \overrightarrow{v}\rangle))}$.

Justifier *très brièvement* que $L_X$ est de classe $C^\infty$. *Indication* : Noter que $X$ prend un nombre *fini* de valeurs !

Calculer $L_X(0)$ et montrer que $L'_X(0) = 0$.

**2)** On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $\lambda > 0$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$P(\langle S_n, \overrightarrow{v}\rangle \geq \lambda) \leq \exp(n \ln L_X(t) - \lambda t)$$

b) [0.5 pt] On *admet* $\forall t \geq 0$, $\ln L_X(t) \leq \dfrac{1}{2}t^2$. En déduire $P(\langle S_n, \overrightarrow{v}\rangle \geq \lambda) \leq \exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2n}\right)$.

c) [1.5 pt] En déduire que

$$P(\|S_n\| \geq \lambda) \leq 2d \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2dn}\right)$$

*Indication* : Considérer une BON $(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_d})$ de $\mathbb{R}^d$. On a alors $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^d \langle S_n, \overrightarrow{v_k}\rangle^2$.

**3)** (★) *Question supplémentaire* : Montrer que $(\ln L_X)''(t) \leq 1$. En déduire $\forall t \geq 0$, $\ln L_X(t) \leq \frac{1}{2}t^2$.