Révision n°4. Nombres de Catalan. Corrigé

1) La décomposition $e = (e_1)e_2$ étant unique, construire un mot bien parenthésé e de longueur $(2n+2)$ revient à choisir le couple (e_1, e_2) qui sont des mots bien parenthésés dont la somme des longueurs vaut $2n$.

Les longueurs de e_1 et e_2 sont donc de la forme $2k$ et $2(n-k)$, où $0 \leq k \leq n$. D'où $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

2) Il y a 2^{2n} mots de longueur $2n$ dont les caractères sont des parenthèses ouvrantes ou fermantes
Donc $c_n = O(4^n)$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ vérifie $R \geq \dfrac{1}{4} > 0$.

3) Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, on a $F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.
Par produit de Cauchy, on a : $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $F(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.
Donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + xF(x)^2$.

Remarque : Le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique à l'intérieur du disque de convergence (valide car il y a convergence absolue des séries).

4) On a $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $(2xF(x)-1)^2 = 4x(xF(x)^2 - F(x)) + 1 = -4x + 1 \neq 0$.

5) Ainsi, $x \longmapsto (2xF(x)-1)$ est continue et ne s'annule pas, donc est de signe constant sur $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$.

Or, sa valeur en 0 est -1, donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $2xF(x) - 1 < 0$.

Or, $(2xF(x)-1) = \pm\sqrt{1-4x}$. Donc $2xF(x) - 1 = -\sqrt{1-4x}$, d'où $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour $x \neq 0$.

6) Par le cours, on sait que $u \longmapsto \sqrt{1-u}$ est DSE de rayon $R = 1$, donc

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1-u} = (1-u)^{1/2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{u^n}{n!}$$

Donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{4^{n+1}x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{4^n x^n}{(n+1)!}$$

Or, $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\cdots\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4^n}{(n+1)!} = \dfrac{2^n}{n+1}\,\dfrac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
On obtient donc $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$, y compris en $x = 0$ car $F(0) = 1$.

Par unicité du DSE, on a donc $c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

(en effet, deux séries entières qui coïncident au voisinage de 0 ont les mêmes coefficients).

7) a) On a $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 2\dfrac{2n+1}{n+2}$.

b) On a donc $\dfrac{c_{n+1}}{4c_n} = \dfrac{1+1/2n}{1+2/n} = \left(1 - \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. On pose $a_n = \dfrac{n^{3/2}c_n}{4^n}$.

On a alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \dfrac{3}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc la série $\sum \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ converge. Alors $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel μ.

Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$, où $\lambda = e^{\mu} > 0$. On en déduit $c_n \sim \dfrac{\lambda 4^n}{n^{3/2}}$.

Exercice B. Puissances et exponentielle matricielles

1) a) Toute application linéaire en dimension finie est lipschitzienne. D'où l'existence de K.

b) Posons $Y = AX$. On a $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Donc $|y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, \|X\|_\infty$, et ainsi $\|AX\|_\infty \leq L \, \|X\|_\infty$, avec $\boxed{K = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$.

Montrons que ce majorant est atteint, et ainsi, que K est la plus petite constante possible.

Il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = K$.

On considère alors un vecteur X de sorte que :

- d'une part que les $a_{ij}x_j$ soient tous des réels positifs (de sorte que $|y_i| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|$)

- d'autre part que les x_j aient tous le même module (de sorte que $\sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \, \|X\|_\infty$)

On prend par exemple $x_j = \dfrac{\overline{a_{ij}}}{|a_{ij}|}$ si $a_{ij} \neq 0$ et $x_j = 1$ sinon.

On a ainsi $|y_i| = K$ et $\|X\|_\infty = 1$, donc $\|AX\|_\infty = K \, \|X\|_\infty$.

Remarque culturelle : $K = N(A) = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

appelée norme subordonnée à la norme $\| \, \|_\infty$ de $\mathbb{C}^n$.

2) a) *Première méthode* (conseillée) :

On considère la division euclidienne de x^k par $\chi_A(x)$: on a $x^k = Q_k(x)\chi_A(x) + R_k(x)$, avec $\deg R_k(x) < n$.

On a alors $A^k = Q_k(A)\chi_A(A) + R_k(A) = R_k(A)$, car $\chi_A(A) = O_n$ (th de Cayley-Hamilton).

Seconde méthode :

Comme $\chi_A(A) = A^n + ... = O_n$, on a directement $A^n \in \boxed{F = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, ..., A^{n-1})}$.

Montrons par récurrence sur k que $A^k \in F$.

La propriété est donc immédiate pour $k \leq n$. Supposons $A^k \in F$).

Alors $A^{k+1} = AA^k \in \mathrm{Vect}(A, A^2, ..., A^{n-1}, A^n) \subset .F$, car $A^n \in F$.

b) On a $x^k = Q_k(x)\chi_A(x) + R_k(x)$, donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(\lambda_j)^k = R_k(\lambda_j)$, car $\chi_A(\lambda_j) = 0$.

Donc R_k est l'unique polynôme de degré $< n$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $R_k(\lambda_j) = (\lambda_j)^k$.

Ainsi, $R_k(x) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j)^k L_j(x)$, et donc $R_k(A) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j)^k L_j(A)$.

Variante matricielle : Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \, \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$.

On a alors $A^k = P \, \mathrm{Diag}((\lambda_1)^k, ..., (\lambda_n)^k)P^{-1}$.

De façon plus générale, pour tout polynôme Q, on a $Q(A) = P \, \mathrm{Diag}(Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_1))P^{-1}$.

Donc R_k est l'unique polynôme de degré $< n$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $R_k(\lambda_j) = (\lambda_j)^k$.

3) a) On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|A^k Z\right\|_\infty \leq K^k \, \|Z\|_\infty$,, donc $\left\|\dfrac{t^k}{k!} A^k Z\right\|_\infty \leq \dfrac{|t|^k}{k!} K^k \, \|Z\|_\infty$.

Donc chaque coefficient $x_i(t)$ de $X(t)$ est défini par **une série de fonctions normalement convergente** (par rapport à t) sur tout segment $[-\rho, \rho]$ de $\mathbb{R}$:

En effet, $x_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!}(A^k Z)_i$, et on a $\sup_{[-\rho,\rho]} \left|\dfrac{t^k}{k!}(A^k Z)_i\right| \leq \|Z\|_\infty \dfrac{(\rho K)^k}{k!}$.

Et il est de même de la série des dérivées $\sum x_i'(t) = \sum \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A^k Z)_i$.